# Capítulo 6

# Contraste de Hipótesis

## 6.1. Introducción

Una hipótesis es simplemente una afirmación sobre la ley de probabilidades que posee cierta variable aleatoria. Para contrastar o probar esta hipótesis realizaremos una m.a.s. de la v.a. y en base a ésta aceptaremos o rechazaremos la hipótesis enunciada. Siempre que se formule una hipótesis aceptaremos o rechazaremos ésta frente a otra hipótesis alternativa. Aceptar la hipótesis depende de si los resultados de la m.a.s. son consistentes con ella, de lo contrario se admite como verdadera la hipótesis alternativa. La regla de decisión por la que se decide o rechaza se lleva a cabo mediante la realización de estadísticos y a través del cálculo de la probabilidad de cometer error. Tales reglas reciben el nombre de contrastes.

Existen básicamente dos tipos de afirmaciones acerca de una v.a. $\xi$. El primer tipo hace referencia explícita a su función de distribución $F_\xi$, fundamentalmente establece hipótesis sobre los parámetros de los que depende esta distribución. El segundo tipo de afirmación es sobre la naturaleza de la propia v.a., si es de tipo discreto o continuo, si es o no independiente de otra v.a., etc. A lo largo de este capítulo trabajeremos con el primer tipo de hipótesis y la principal meta será manejarnos con soltura en la construcción de contrastes paramétricos.

EJEMPLO 6.1 *Supongamos que $\xi \sim B(20, p)$ y enunciamos las siguientes* *hipótesis:*

$$\begin{aligned} H_1 &\equiv p = 1/4,\ H_2 \equiv p = 1/2,\ H_3 \equiv p = 0{,}9, \\ H_4 &\equiv p < \frac{1}{8},\ H_5 \equiv p \in [0{,}4, 0{,}5) \end{aligned}$$

*Son cinco hipótesis sobre la v.a. $\xi$.*

Si la hipótesis especifica completamente la distribución de $\xi$ diremos que es simple, en otro caso se dice compuesta. Así en el ejemplo de arriba las tres primeras hipótesis son simples y las dos últimas son compuestas.

### 6.1.1. Definiciones. Hipótesis y funciones de contraste

Dado que en base a la realización de una m.a.s. $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ de $\xi$ nos decidiremos si aceptar o no, dividimos el espacio de todas los posibles resultados $(x_1, x_2, ..., x_n)$ en dos partes. Una parte $A$ por la que nos decidimos a aceptar una hipótesis de partida, que llamaremos nula y denotaremos por $H_0$, y otra $C$ por la que rechazaremos. De este modo

$$R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\} = A \cup C.$$

A la región $A$ la llamaremos de aceptación de $H_0$ y a $C$ región crítica o de rechazo. Como es obvio, determinar tales regiones es equivalente construir un contraste para la hipótesis $H_0$.

Pueden existir distintas formas para decidirse sobre $H_0$ en función de la muestra, sin embargo lo ideal será encontrar aquella que minimice los posibles errores.

Dada una hipótesis nula $H_0$, existen dos tipos de errores:

**Error de tipo 1:** Cuando rechazamos $H_0$ siendo verdadera; este error se denota por $E_1$.

**Error de tipo 2:** Cuando aceptamos $H_0$ siendo falsa; este error se denota por $E_2$.

Como ya hemos dicho lo óptimo sería dividir $R^n$ en $A \cup C$ de modo que la probabilidad de cometer cualquiera de los dos errores sea pequeña.

Ejemplo 6.2 *Sea el modelo*

$$\xi = \begin{cases} 1 & si\ C \\ 0 & si\ X \end{cases}$$

*con* $\xi \sim B(1,p)$. *Realizamos una m.a.s. de tamaño* $n$ *y tomamos como estimador a* $\overline{\xi}$. *El objetivo es comprobar si la moneda está o no cargada y para ello definimos las hipótesis nula y alternativa como sigue:*

$$H_0 \equiv p = 0{,}5,\ \ H_1 \equiv p \neq 0{,}5$$

*Para decidirnos realizamo* $\overline{\xi}$, *i.e. observamos el valor*

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

*Supongamos que* $n = 10$. *Construimos el siguiente contraste: si* $s = n\overline{x}$, *entonces rechazamos si*

$$s \in C = \{0,1,2,8,9,10\},$$

*y aceptamos si*

$$s \in A = \{3,4,5,6,7\}.$$

*Calculamos la probabilidad de cometer errores. Por un lado está el error de tipo 1:*

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(\textit{rechazar } H_0 |\, H_0 \textit{ cierto}) \\ &= P\left(s \in C |\, p = 0{,}5\right) \\ &= P\left(B(10, 0{,}5) \in \{0,1,2,8,9,10\}\right) \\ &= 0{,}1094 \end{aligned}$$

*Esto indica que el 11 % de las veces que rechacemos no estará cargada.*

*Calculamos la probabilidad de cometer el error de tipo 2:*

$$\begin{aligned} &P(E_2) = P(\textit{aceptar } H_0 |\, H_0 \textit{ falsa}) = P\left(s \in A |\, p \neq 0{,}5\right) \\ &P\left(B\left(10,p\right) \in A |\, p \neq 0{,}5\right) \\ &= \binom{10}{3} p^3(1-p)^7 + \binom{10}{4} p^4(1-p)^6 + ... + \binom{10}{7} p^7(1-p)^3 \\ &= C(p) \end{aligned}$$

*con* $p$ *un parámetro desconocido del intervalo* $(0,1)$. *En esta ocasión cabe pensar que* $C(p)$ *será alto cuando* $p$ *esté cerca de* $0{,}5$ *y bajo en el caso en que esté lejos de tal valor.*

Elementos básicos de un contraste paramétrico:

1. El marco general en el que afrontaremos el problema de decidirnos o no por una hipótesis realativa a una v.a. es la de una v.a. $\xi \sim F_\theta$ con respecto a la cual se consideran las hipótesis

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 \equiv \theta \in \Theta_0 \text{ hipótesis nula} \\ H_1 \equiv \theta \in \Theta_1 \text{ hipótesis alternativa} \end{array} \right.$$

suponiendo que $\Theta$, el **espacio paramétrico**, se descompone como $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$.

2. **Nivel de significación**. Para construir la regla de decisión la estrategía a seguir es fijar el más grande de los errores de tipo 1 esto es, considerar

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} P\left(\text{rechazar } H_0\right)$$

que en adelante denominaremos **nivel de significación**, y seguidamente intentar minimizar

$$\beta = P(E_2)$$

o maximizar $1 - \beta$.

3. Un Contraste se construye mediante una función $\varphi$, llamada **función crítica del contraste**. La función $\varphi$ se define como aquella que a cada realización de la m.a.s. le hace corresponder la probabilidad de rechazar $H_{0,}$ i.e.

$$\begin{array}{llll} \varphi : & R^n & \rightarrow & [0,1] \\ & (x_1, ..., x_n) & \rightarrow & \varphi\left(x_1, ..., x_n\right) = P\left(\text{rechazar } H_0|_{\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n}\right) \end{array}$$

Cuando

$$\varphi\left(x_1, ..., x_n\right) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \left(x_1, ..., x_n\right) \in C \\ 0 & \text{si } \left(x_1, ..., x_n\right) \in A \end{array} \right.$$

entonces la función $\varphi$ define un *contraste no aleatorizado*; observamos que en esta situación está claro cuando se acepta (cuando la muestra se realiza en $C$) y cuando se rechaza $H_0$ (cuando la muestra queda en $A$). Existen en cambio casos en los que la función crítica no nos indica claramente cuál es la decisión, son casos para los que la definición de dicha función tiene la forma

$$\varphi(x_1,...,x_n)=\begin{cases}1 & \text{si } (x_1,...,x_n)\in C\\ 0 & \text{si } (x_1,...,x_n)\in A\\ \gamma(x_1,...,x_n) & \text{si } (x_1,...,x_n)\in \Gamma\end{cases}$$

siendo $\Gamma$ la frontera entre los conjuntos $A$ y $C$. Este tipo de contrastes se denominan *contrastes aleatorizados*. Un ejemplo de contraste no aleatorizado es el visto en el ejemplo previo. Sin embargo, basta con darse cuenta de que existen valores como $8, 2, 3, 7$, que son dudosos, lo que nos induce a la construcción de un contraste aleatorizado. Para la mayoría de las situaciones en este capítulo usaremos contrastes no aleatorizados.

## 6.2. Potencia de un contraste

Dado un contraste $\varphi$ se define su función de potencia como el valor esperado de $\varphi$ :

$$\beta_\varphi(\theta)=E_\theta(\varphi)=E_\theta(\varphi(\xi_1,...,\xi_n)).$$

Nótese que

$$\beta_\varphi(\theta)=E_\theta(\varphi)=\int_{R^n}\varphi(x_1,...,x_n)f_\theta(x_1,...,x_n)\,dx_1...dx_n$$

y que si

$$\varphi(x_1,...,x_n)=\begin{cases}1 & \text{si } (x_1,...,x_n)\in C\\ 0 & \text{si } (x_1,...,x_n)\in A,\end{cases}$$

entonces decir que aceptamos $H_0$ es decir que $(x_1,...,x_n)\in A$, y decir que rechazamos es decir que $(x_1,...,x_n)\in C$. Por tanto

$$\begin{aligned}\beta_\varphi(\theta) &= E_\theta(\varphi)=\int_{R^n}\varphi(x_1,...,x_n)f_\theta(x_1,...,x_n)\,dx_1...dx_n\\ &= \int_C 1 f_\theta(x_1,...,x_n)\,dx_1...dx_n\\ &= P(C)\\ &= P(\text{rechazar } H_0).\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\beta_\varphi(\theta)=P(C)=P(\text{rechazar } H_0).$$

Dependiendo de en qué conjunto se encuentre $\theta$ así será el valor de la potencia:

- si $\theta \in \Theta_0$ (i.e. $H_0$ cierta), entonces

$$\begin{aligned} \beta_{\varphi}(\theta) &= P\left(\text{rechazar } H_0 \middle| H_0 \text{ cierta}\right) \\ &= P(E_1) \end{aligned}$$

- si $\theta \in \Theta_1$ (i.e. $H_0$ falsa), entonces

$$\begin{aligned} \beta_{\varphi}(\theta) &= P\left(\text{rechazar } H_0 \middle| H_0 \text{ falsa}\right) \\ &= 1 - P\left(\text{aceptar } H_0 \middle| H_0 \text{ falsa}\right) \\ &= 1 - P(E_2) \\ &= 1 - \beta. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\beta_{\varphi}(\theta) = \begin{cases} P(E_1) & \text{si } \theta \in \Theta_0 \\ 1 - P(E_2) & \text{si } \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

y así, en relación con la forma general en la que vamos a proceder, se fijará el mayor de los valores de potencia en $\Theta_0$, esto es, consideraremos

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_{\varphi}(\theta)$$

el cual lógicamente deberá ser pequeño, y pretenderemos que $1 - \beta$ lo más grande posible.

Ejemplo 6.3 *Supongamos que tenemos una v.a. $\xi \sim N(\theta, 5)$ y una muestra de tamaño 25. Se establecen las hipótesis*

$$H_0 \equiv \theta = 12, \;\; H_1 \equiv \theta = 15$$

*y se define un contraste cuya región crítica es $C = \{(x_1, ..., x_{25}) : \overline{x} \geq 14\}$. Determinemos los errores y la función de potencia del contraste:*

*1.*

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P\left(\textit{Rech. } H_0 \middle| H_0 \textit{ cierta}\right) \\ &= P\left(\overline{\xi} \geq 14 \middle| \theta = 12\right) \\ &= P\left(N\left(12, \frac{5}{\sqrt[2]{25}}\right) \geq 14\right) \\ &= 0{,}022 \end{aligned}$$

*2.*

$$\begin{aligned} P\left(E_2\right) &= P\left(\textit{Acep. } H_0\right|H_0 \textit{ falsa}) \\ &= P\left(\overline{\xi} \leq 14\right|\theta = 15\big) \\ &= P\left(N\left(15, \frac{5}{\sqrt[2]{25}}\right) \leq 14\right) \\ &= 0{,}15 \end{aligned}$$

*3.*

$$\beta_{\varphi}\left(\theta\right) = \left\{ \begin{array}{cc} 0{,}022 & si\ \theta = 12 \\ 1 - 0{,}15 & si\ \theta = 15 \end{array} \right.$$

EJEMPLO 6.4 *Una urna contiene 10 bolas, $\theta = M$ de ellas son blancas y el resto negras. Se dan las hipótesis*

$$H_0 \equiv M = 5,\ \ H_1 \equiv M = 6$$

*y se extraen 6 bolas sin reemplazamiento. La hipótesis nula es rechazada si la muestra contiene no más de una bola blanca, y es aceptada en otro caso. Deduzcamos el nivel de significación del contraste así como su función de potencia. Al realizar un muestreo de tamaño 6 consideramos $X_1$, $X_2, \ldots\ X_6$ v.a. distribuidas según una $B(1,p)$ con $p = \frac{M}{10}$. Si $S = \sum X_i$ entonces el criterio viene dado por el test*

$$\varphi\left(X_1, \ldots, X_6\right) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & si\ S \leq 1 \\ 0 & si\ S > 1 \end{array} \right.$$

*Evaluamos los errores:*

$$\begin{aligned} P\left(E_1\right) &= P\left(\textit{Rech. } H_0\right|H_0 \textit{ cierta}) \\ &= P\left(S \leq 1\right|M = 5) = P\left(S = 1 \textit{ ó } S = 0\right|M = 5) \\ &= P\left(B(6, \frac{5}{10}) = 1 \textit{ ó } B(6, \frac{5}{10}) = 0\right) \end{aligned}$$

*y*

$$\begin{aligned} P\left(E_2\right) &= P\left(\textit{Acep. } H_0\right|H_0 \textit{ falsa}) \\ &= P\left(S > 1\right|M = 6) \\ &= 1 - P\left(S \leq 1\right|M = 6) \\ &= 1 - P\left(B(6, \frac{6}{10}) = 1 \textit{ ó } B(6, \frac{6}{10}) = 0\right). \end{aligned}$$

EJEMPLO 6.5 *En una imprenta se acepta un libro para imprimir si el número medio de erratas no supera al 10 %: cuando llega el libro a la imprenta se eligen 10 páginas al azar y se devuelve éste sin imprimir si en éstas hay 2 o más erratas. Se supone que* $\xi = n^o$ *de erratas por página sigue una distribucióndne Poisson de parámetro* $\lambda$ *y que por ende* $\lambda$ *es el número medio de erratas por página. La forma de decidirse por parte de la imprenta es a través de un contraste, veamos cómo funciona: el contraste queda definido por*

$$\begin{aligned} H_0 &\equiv \text{la prueba de la imprenta es correcta si } \lambda \leq 0{,}1 \text{ (se imprime)} \\ H_1 &\equiv \text{no se imprime si } \lambda > 0{,}1 \end{aligned}$$

*Para la realización del contraste disponemos del número de erratas en 10 páginas, i.e.*

$$(\xi_1, ..., \xi_{10}) \rightarrow (x_1, ..., x_{10})$$

*Con ayuda de esta muestra consideramos el estadístico* $S = \sum_{i=1}^{10} \xi_i$*, el cual está distribuido según una* $\mathcal{P}(10\lambda)$*; entonces la imprenta lo que hace es rechazar* $H_0$ *si la realización de* $S$ *es mayor o igual que 2, i.e rechaza si* $\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 2$*, y acepta imprimir si* $\sum_{i=1}^{10} x_i < 2$*. Con otras palabras, la regla por la que se acepta o no la dicta la función de contraste*

$$\varphi(x_1, ..., x_{10}) = \begin{cases} 1 & si \ \sum_{i=1}^{10} x_i \geq 2 \\ 0 & si \ \sum_{i=1}^{10} x_i < 2 \end{cases}.$$

*Calculemos la potencia del contraste: si* $\lambda \in \Theta_0$ *(lo que equivale a decir* $\lambda \leq 0{,}1$)

$$\begin{aligned} \beta_\varphi(\theta) &= P(E_1) = P\left(\sum_{i=1}^{10} \xi_i \geq 2\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{10} \xi_i < 2\right) \\ &= 1 - P\left(\sum_{i=1}^{10} \xi_i = 0 \text{ ó } \sum_{i=1}^{10} \xi_i = 1\right) \\ &= 1 - e^{-10\lambda} - 10\lambda e^{-10\lambda} \end{aligned}$$

*donde* $\lambda \leq 0{,}1$

*Además*

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sup_{\lambda \leq 0{,}1} \beta_\varphi(\lambda) \\
&= \sup_{\lambda \leq 0{,}1} \left\{1 - e^{-10\lambda} - 10\lambda e^{-10\lambda}\right\} \\
&= \beta_\varphi(0{,}1) \\
&= 0{,}2642
\end{aligned}$$

*lo cual indica que podemos rechazar hasta un 26 % de libros con una media de erratas menor o igual que el* 10 %. *Este supremo no es muy bajo, por lo que el contraste no es muy bueno. Por otro lado el error de tipo 2 se calcula del sigueinte modo:*

$$\begin{aligned}
P(E_2) &= P\left(\text{aceptar } H_0 \middle| H_0 \text{ falsa}\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{10} \xi_i < 2 \middle| \lambda > 0{,}1\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{10} \xi_i = 0 \text{ ó } \sum_{i=1}^{10} \xi_i = 1 \middle| \lambda > 0{,}1\right) \\
&= e^{-10\lambda}(1 + 10\lambda)
\end{aligned}$$

*que para* $\lambda = 0{,}2$ *da un error* $P(E_2) = \exp(-10(0{,}2))(1 + 10(0{,}2)) \approx 0{,}406\,01$. *Esto tiene una lectura sencilla, que el valor esperado de libros malos que aceptamos excede el 40 %. A tenor de lo expuesto podemos decir que el contraste no es bueno, el nivel de significación no es pequeño y la función de potencia no es grande en la región* $\Theta_1$.

## 6.3. Lema de Neyman-Pearson

Nuestra meta es encontrar funciones críticas de contraste $\varphi$ al objeto de contrastar una hipótesis nula $H_0 \equiv \theta \in \Theta_0$ frente a otra alternativa $H_1 \equiv \theta \in \Theta_1$ de forma que el nivel de significación sea $\alpha$, i.e. $\beta_\varphi(\theta) \leq \alpha$ si $\theta \in \Theta_0$. Cuando esto ocurra diremos simplemente que $\varphi$ es un test para el problema $(\alpha, \Theta_0, \Theta_1)$. Al conjunto de todas las funciones test que existen para el problema de contraste $(\alpha, \Theta_0, \Theta_1)$ lo denotarmeos por $\Phi_\alpha$. Como ya se ha comentado lo ideal es localizar una $\varphi \in \Phi_\alpha$ de suerte que $\beta_\varphi(\theta)$ sea grande cuando $\theta \in \Theta_1$, lo más grande posible.

DEFINICIÓN 6.1 *Se dice que el test $\varphi_0 \in \Phi_\alpha$ es uniformemente de máxima potencia si*

$$\beta_{\varphi_0}(\theta) \geq \beta_{\varphi}(\theta) \text{ para toda } \varphi \in \Phi_\alpha \text{ y cualquiera que sea } \theta \in \Theta_1.$$

Por tanto nuestra finalidad es encontrar un test de $\Phi_\alpha$ de máxima potencia. El término uniformemente en la definición anterior tiene sentido si la hipótesis $H_1$ es compuesta. Por eso, si $H_1$ es simple al test se le llama contraste de máxima potencia y se dice que $\varphi$ es el CMP. Si fuese uniformemente de máxima potencia escribiremos CUMP.

La respuesta al problema $(\alpha, \Theta_0, \Theta_1)$, cuando las hipótesis son simples, nos la da el siguiente resultado:

TEOREMA 6.1 (LEMA DE NEYMAN-PEARSON) *Sea el problema*

$$(\alpha, \Theta_0 = \{\theta_0\}, \Theta_1 = \{\theta_1\}),$$

*entonces:*

1. *Existe un contraste $\varphi$ y una constante $\lambda$ tales que*

   a) $\beta_{\varphi}(\theta_0) = E_{\theta_0}[\varphi] = \alpha$

   b)

   $$\varphi(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 1 & si\ f_{\theta_1}(x_1, ..., x_n) > \lambda f_{\theta_0}(x_1, ..., x_n) \\ 0 & si\ f_{\theta_1}(x_1, ..., x_n) < \lambda f_{\theta_0}(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

   *y $\varphi(x_1, ..., x_n) = \gamma$ (una constrante) si $f_{\theta_1}(x_1, ..., x_n) = \lambda f_{\theta_0}(x_1, ..., x_n)$*

2. *Todo contraste $\varphi$que satisface el punto 1, para cierto $\lambda$, es de máxima potencia y nivel $\alpha$.*

3. *Si $\varphi$ es un contraste de máxima potencia y nivel $\alpha < 1$ entonces $\varphi$ tiene que ser como en el punto 1.*

### 6.3.1. Ejemplos

EJEMPLO 6.6 *Dada una m.a.s. $\xi_1, ..., \xi_n$ $N(\mu, \sigma_0)$ con $\sigma_0$ conocida consideramos el contraste*

$$\begin{cases} H_0 = \mu = \mu_0 \\ H_1 = \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 > \mu_0) \end{cases}$$

*buscamos un contraste de máxima potencia y nivel $\alpha$. En base al resultado previo la función crítica ha de ser de la forma*

$$\varphi(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1 & si\ \lambda(x_1,...,x_n) > k \\ 0 & si\ \lambda(x_1,...,x_n) < k \end{cases}$$

*con*

$$\begin{aligned}
\lambda(x_1,...,x_n) &= \frac{f_{\theta_1}(x_1,...,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,...,x_n)} \\
&= \frac{f_{\theta_1}(x_1)...f_{\theta_1}(x_n)}{f_{\theta_0}(x_1)...f_{\theta_0}(x_n)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma_0^2}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)} \\
&= \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma_0^2} + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \\
&= \exp\left(\left(\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0^2}\right)\sum_{i=1}^n x_i + n\frac{(\mu_0-\mu_1)^2}{2\sigma_0^2}\right)
\end{aligned}$$

*Observamos que $\lambda$ se puede escribir como una función creciente en la variable $s = \sum_{i=1}^n x_i$, esto es*

$$\lambda = \exp(cs + d)$$

*con $c$ y $d$ ciertas constantes dependeintes de los parámetros y positivas. Como es creciente, decir que $\lambda > k$ es equivalente a $s > k'$, para cierta $k'$. De esta forma podemos reescribir $\varphi$ como*

$$\varphi = \begin{cases} 1 & si\ s > k' \\ 0 & si\ s < k' \end{cases}$$

*Evaluamos el nivel: éste está fijado de antemano y como sólo hay un parámetro en $\Theta_0$ dicho nivel ha de ser*

$$\alpha = E[\varphi] = P(s > k')$$

*tomando como parámetro $\mu = \mu_0$; así pues*

$$\begin{aligned}
\alpha &= E[\varphi(\xi_1,...,\xi_n)] = P\left(\sum \xi_i > k'\right) \\
&= P\left(\frac{\sum \xi_i - n\mu_0}{\sqrt{n}\sigma_0} > \frac{k'-n\mu_0}{\sqrt{n}\sigma_0}\right) \\
&= P\left(N(0,1) > \frac{k'-n\mu_0}{\sqrt{n}\sigma_0}\right)
\end{aligned}$$

*Esto implica que* $\frac{k'-n\mu_0}{\sqrt{n}\sigma_0} = Z_\alpha$ *($Z_\alpha$ es aquel número que bajo una normal estándar deja una probabilidad $\alpha$). Por ende* $k' = \sqrt{n}\sigma_0 Z_\alpha + n\mu_0$ *y el CMP es*

$$\varphi(\xi_1, ..., \xi_n) = \begin{cases} 1 & si \ \sum \xi_i > \sqrt{n}\sigma_0 Z_\alpha + n\mu_0 \\ 0 & si \ \sum \xi_i < \sqrt{n}\sigma_0 Z_\alpha + n\mu_0 \end{cases}$$

*Obsérvese que si en lugar de suponer $\mu_1 > \mu_0$ consideramos la desigualdad contraria, entonces $\varphi$ sería decreciente en $s$ y por consiguiente los mismos pasos darían lugar a*

$$\alpha = P\left(\sum \xi_i < k'\right)$$

*i.e*

$$1 - \alpha = P\left(\sum \xi_i > k'\right) = P\left(N(0,1) > \frac{k' - n\mu_0}{\sqrt{n}\sigma_0}\right)$$

*Con ello llegamos a que* $\frac{k'-n\mu_0}{\sqrt{n}\sigma_0} = Z_{1-\alpha}$ *ya que el test de máxima potencia habría sido*

$$\varphi(\xi_1, ..., \xi_n) = \begin{cases} 1 & si \ \sum \xi_i > \sqrt{n}\sigma_0 Z_{1-\alpha} + \mu_0 \\ 0 & si \ \sum \xi_i < \sqrt{n}\sigma_0 Z_{1-\alpha} + \mu_0 \end{cases}$$

EJEMPLO 6.7 *Realizamos el mismo contraste pero suponiendo que la desviación típica $\sigma$ del modelo es desconocida. El procedimiento es el mismo, la variación hemos de hacerla cuando analizamos $\alpha = P\left(\sum \xi_i > k'\right)$; en lugar de modelar con una normal lo hacemos con una $t$ de Student haciendo*

$$\begin{aligned} \alpha &= P\left(\sum \xi_i > k'\right) \\ &= P\left(\frac{\frac{\sum \xi_i}{n} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > \frac{\frac{k'}{n} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= P\left(t_{n-1} > \frac{\frac{k'}{n} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right) \end{aligned}$$

*Hecho esto tendremos que* $k' = \sqrt{n} S t_{n-1,\alpha} + n\mu_0$ *y*

$$\varphi(\xi_1, ..., \xi_n) = \begin{cases} 1 & si \ \sum \xi_i > \sqrt{n} S t_{n-1,\alpha} + n\mu_0 \\ 0 & si \ \sum \xi_i < \sqrt{n} S t_{n-1,\alpha} + n\mu_0 \end{cases}$$

*Los mismos comentarios hechos para el ejemplo anterior valen ahora si pretendemos hallar un contraste en el que se supone $\mu_1 > \mu_0$.*

EJEMPLO 6.8 *Sea el modelo dado por una v.a. $X$ cuya densidad de probabilidad es*

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & si\ x \in (0,1) \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

*Consideremos el test $(\alpha, \Theta_0 = \{1\}, \Theta_1 = \{\theta_1\})$ (supuesto $\theta_1 > 1$). Se trata de un caso como los anteriores, de hipótesis simples. El modelo ha cambiado pero el proceso es el mismo. Usamos el Lema de Neyman-Pearson y para ello analizamos $\lambda > k$. Esto equivale a anlizar $L = \log \lambda > k'$, i.e.*

$$\begin{aligned} L &= \log\left(\frac{f_{\theta_1}(\xi_1, ..., \xi_n)}{f_{\theta_0}(\xi_1, ..., \xi_n)}\right) \\ &= \log\left(\frac{\theta_1 \xi_1^{\theta_1-1} ... \theta_1 \xi_n^{\theta_1-1}}{\theta_0 \xi_1^{\theta_0-1} ... \theta_0 \xi_n^{\theta_0-1}}\right) \\ &= n\theta_1 + (\theta_1 - 1)\left(\Sigma_{i=1}^n \log \xi_i\right) \end{aligned}$$

*y como $\theta_1 - 1 > 0$, $L$ es creciente como función de $s = \Sigma_{i=1}^n \log \xi_i$. Así pues, $L > k'$ equivale a $s > k''$, con $k''$ una constante por determinar. Usamos el nivel para hallarla:*

$$\alpha = P\left(\Sigma_{i=1}^n \log \xi_i > k'\right) = P\left(\Sigma_{i=1}^n \psi_i > k'\right)$$

*con $\psi_i = \log \xi_i$. Supongamos que $\mu_0$ y $\sigma_0$ son la esperanza y varianza de $\psi_i$,*[1] *entonces por el TCL*

$$\alpha = P\left(\Sigma_{i=1}^n \psi_i > k'\right) \approx P\left(N(0,1) > \frac{k' - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right),$$

*de modo que $k' = \sigma_0/\sqrt[2]{n} Z_\alpha + \mu_0$. Con esto y contraste queda completamente determinado.*

[1]Por ejemplo, el cálculo de $\mu_0$ es

$$\begin{aligned} \mu_0 &= E[\log \xi] \\ &= \theta_0 x^{\theta_0-1} \int_0^1 \log(x) dx \end{aligned}$$

pero como $\theta_0 = 0$ entonces $\mu_0 = -1$. Del mimo modo

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= E\left[(\log \xi)^2\right] \\ &= \int_0^1 (\log(x))^2 \, dx = 2 \end{aligned}$$

y por ende $\sigma_0 = 1$.

Los ejemplos considerados son situaciones modeladas por distribuciones de tipo continuo. Al tratar modelos discretos hemos de contemplar situaciones en las que no basta con un contraste no aleatorizado. Hemos de considerar los aleatorizados. No obstante, si el tamaño de la muestra es suficientemente grande, entonces los no aleatorizados son suficientes para hallar contrastes de máxima potencia (CMV en adelante).

EJEMPLO 6.9 *El propietario de una gasolinera sostiene la hipótesis de que el número medio de coches que reposta en su gasolinera es de 1. Se supone que la v.a.* $\xi = n^o$ *de coches que reposta por hora se distribuye según una Poisson de parámetro* $\theta$. *Rechazarías su hipótesis frente a la hipótesis de que el número medio es 2 si durante 20 horas vinieron 7 coches, a un nivel de significación* $\alpha = 0{,}1$?

*Se sabe que* $\xi \sim \mathcal{P}(\theta)$ *y que la media de dicha variable coincide con el parámetro* $\theta$. *Así pues el test ha de contrastar* $(\alpha, \Theta_0 = \{1\}, \Theta_1 = \{2\})$. *Evaluamos el conciente de verosimilitudes:*

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{e^{-\theta_1}\theta_1^{x_1}...e^{-\theta_1}\theta_1^{x_n}}{e^{-\theta_0}\theta_0^{x_1}...e^{-\theta_0}\theta_0^{x_n}} = e^{m(\theta_0-\theta_1)}\theta_0^{-s}\theta_1^{s} \\ &= e^{m(\theta_0-\theta_1)}\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^s = e^{m(\theta_0-\theta_1)}(2)^s\end{aligned}$$

*así que vemos que* $\lambda$ *es creciente en* $s$, *por lo que* $\lambda > k$ *equivale a* $s > k'$. *Al considerar* $n$ *v.a.* $\mathcal{P}(\theta)$ *tendremos que* $S = \sum \xi_i \sim \mathcal{P}(n\theta)$ , *por lo que*

$$P(s > k') = P(\mathcal{P}(n\theta) > k')$$

*y si lo que pretendemos es evaluar el error de tipo 1* ($\alpha$), *entonces* $\theta$ *es 1,* $n = 20$, *y queda*

$$\alpha = 0{,}1 = P(\mathcal{P}(20) > k').$$

*Llegados aquí restaría determinar el* $k'$, *sin embargo no tiene por qué existir una tal constante* $k'$ *verificando la igualdad anterior, puesto que una Poisson tiene sus puntos de masa en los números naturales. La alternativa es considerar un contraste aleatorizado, o si se tiene una muestra suficientemente grande, aproximar por alguna distribución continua. Veámos cómo se lleva a cabo esta segunda opción en el ejemplo: implicitamente estamos diciendo que* $n = 20$ *es lo suficientemente grande como para asegurar que la distribución de* $\overline{\xi}$ *sigue aproximadamente una distribución* $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$ *con* $\mu = E[\xi] = \theta$ *y*

$\sigma = \sqrt{V[\xi]} = \sqrt{\theta}$. *Así todo diremos que en virtud del TCL* $\overline{\xi} \sim N(\theta, \sqrt{\theta}/\sqrt{n})$ *y que por ende*

$$\begin{aligned}\alpha &= 0{,}1 = P(s > k') = P\left(\overline{\xi} > \frac{k'}{n}\right) \\ &= P\left(N(0,1) > \frac{\frac{k'}{n} - \theta}{\sqrt{\theta}/\sqrt{n}} = k''\right)\end{aligned}$$

*Esto da lugar a que con* $\theta = 1$ *y* $n = 20$

$$k'' = \frac{\frac{k'}{n} - 1}{1/\sqrt{n}} = \frac{k' - 20}{\sqrt{20}} = Z_{0,1} = 1{,}285$$

*y así* $k' = 1{,}285\sqrt[2]{20} + 20 \approx 25{,}74$. *De resultas tenemos que el CMP es*

$$\varphi(\xi_1, ..., \xi_n) = \begin{cases} 1 & si \ \sum \xi_i > 25{,}74 \\ 0 & si \ \sum \xi_i < 25{,}74 \end{cases}$$

*Como la realización de la muestra,* $(x_1, ..., x_n)$, *es tal que* $s = 7$, *entonces* $\varphi(\xi_1, ..., \xi_n) = 1$ *y por tanto se rechaza la hipótesis nula.*

Los ejemplos analizados son situaciones en las que siempre se dan dos hipótesis simples, y en las que por tanto la aplicación directa del Lema nos garantiza el contraste. Sin embargo, hemos de analizar otros casos con hipótesis que no son simples y en los que son frecuentes la inexistencia de un CUMP. No obstante disponemos de resultados que garantizan la construcción de test con buenas propiedades. Estos resultados están basados en el Lema de Neyman-Pearson y su exposición viene dada en las dos secciones que siguen

## 6.4. Construcción de contrastes

### 6.4.1. Contraste con cociente de verosimilitudes monótono

La discusión sobre como constuir constrastes (uniformemente) de máxima potencia con hipótesis compuestas es bastante sencilla de discutir cuando el cociente de verosimilitudes, $\lambda$, es una función monótona en un estadístico $T$. Cuando esto ocurre y cuando se dan determinadas circunstancias, se puede probar que el test que proporciona el Lema de Neyman-Pearson es un contraste uniformemente de máxima potencia (CUMP).

DEFINICIÓN 6.2 *Se dice que la familia de densidades* $\{f_\theta\}$ [2] *es monótona para el cociente de verosimilitudes* $\lambda$ *en el estadístico* $T(x_1, ...x_n)$ *si*

$$\lambda(x_1, ...x_n) = \frac{f_{\theta_1}(x_1, ...x_n)}{f_{\theta_0}(x_1, ...x_n)}$$

*es una función creciente o decreciente de* $T = T(x_1, ...x_n)$ *cuando* $\theta_1 > \theta_0$.

Como consecuencia directa, tendremos que tal y como ocurre en la mayoría de los ejemplos, decir

$$\lambda(x_1, ...x_n) > c$$

es quivalente a decir

$$T(x_1, ...x_n) > c'$$

para cierta $c'$ y supuesto que la familia se monótona creciente en el estadístico $T$. Con ello el contraste (en el caso no aleatorizado) quedaría del siguiente modo

$$\varphi(x_1, ...x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } T(x_1, ...x_n) > c' \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El resultado fundametal para la construcción de contraste es el siguiente Terorema:

TEOREMA 6.2 *Sea* $\{f_\theta\}$ *una familia monótona para el cociente de verosimilitudes* $\lambda$ *en el estadístico* $T(x_1, ...x_n)$. *Para el problema*

$$\begin{cases} H_0 = \theta \leq \theta_0 \\ H_1 = \theta > \theta_1 \end{cases}$$

*para un nivel de significación* $\alpha$ *cualquiera, existe constantes* $t_0$ *y* $\gamma \in [0, 1]$ *tal que el contraste*

$$\varphi(x_1, ...x_n) = \begin{cases} 1 & si\ T(x_1, ...x_n) > t_0 \\ \gamma & si\ T(x_1, ...x_n) = t_0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

*es CUMP y nivel* $\alpha = E_{\theta_0}[\varphi]$.

[2] Igualmente válido es todo lo que sigue si en lugar de densidades $f_\theta$ tomamos desnsidades de masa $P_\theta^*$.

NOTA 6.1 *Sin más que cambiar las desigualdades en el constrate anterior conseguimos el CUMP para el problema*

$$\begin{cases} H_0 = \theta \geq \theta_0 \\ H_1 = \theta < \theta_1 \end{cases}$$

EJEMPLO 6.10 *Sea un modelo dado por la v.a. $X \sim N(\mu, \sigma)$ y consideremos el problema*

$$\begin{cases} H_0 = \sigma \leq \sigma_0 \\ H_1 = \sigma > \sigma_0 \end{cases}$$

*donde $\mu$ es conocido (igual para las dos hipótesis).*
*El cociente de verosimilitudes es*

$$\begin{aligned} \lambda(x_1, ..., x_n) &= \frac{f_{\theta_1}(x_1)...f_{\theta_1}(x_n)}{f_{\theta_0}(x_1)...f_{\theta_0}(x_n)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\right)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma_1^2}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2}\right)} \\ &= \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n \exp\left(\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\right)\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right) \end{aligned}$$

*y puesto que $\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\right) > 0$, entonces el cociente $\lambda$ es creciente en*

$$T = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

*y así el contraste pedido es de la forma*

$$\varphi(x_1, ...x_n) = \begin{cases} 1 & si \ \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 > t_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

*Si pretendemos un nivel $\alpha$ entonces*

$$\alpha = P\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2 > \frac{t_0}{\sigma_0^2}\right) = P\left(\mathcal{X}_n^2 > \frac{t_0}{\sigma_0^2}\right)$$

*con lo cual $t_0 = \sigma_0^2 \mathcal{X}_{n,\alpha}$. Con esto el contraste UMP queda completamente determinado.*

*Si suponemos que $\mu$ es desconocido el proceso anterior no vale y la obtención ha de seguirse mediante el método de máxima verosimilitud que será tratado en el subapartado siguiente.*

EJEMPLO 6.11 *Sea un modelo dado por la v.a. $X \sim N(\mu, \sigma)$ y consideremos el problema*

$$\begin{cases} H_0 = \mu \leq \mu_0, \; \sigma = \sigma_0 \\ H_1 = \mu > \mu_0, \; \sigma = \sigma_0 \end{cases}$$

*donde $\sigma_0$ es conocida (igual para las dos hipótesis).*
*El cociente de verosimilitudes es*

$$\begin{aligned} \lambda(x_1, ..., x_n) &= \frac{f_{\theta_1}(x_1)...f_{\theta_1}(x_n)}{f_{\theta_0}(x_1)...f_{\theta_0}(x_n)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma_0^2}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)} \\ &= \exp\left(\left(\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_0^2}\right)\sum_{i=1}^n x_i + n\frac{(\mu_0-\mu_1)^2}{2\sigma_0^2}\right) \end{aligned}$$

*que es creciente en $T = \sum_{i=1}^n x_i$. Al igual que antes fijamos el nivel de significación mediante*

$$\alpha = P_{\mu_0}\left(\sum_{i=1}^n x_i > c\right) = P\left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > \frac{\frac{c}{n} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)$$

*y por ende $\frac{\frac{c}{n}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = Z_\alpha$. Resulta que el CUMP es*

$$\varphi(x_1, ...x_n) = \begin{cases} 1 & si \; \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} > \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} Z_\alpha \\ 0 & en \; otro \; caso \end{cases}$$

*Para la situación en la que $\sigma_0$ sea desconocida se obtiene $\frac{\frac{c}{n}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = \mathbf{t}_{n-1,\alpha}$ y así el CUMP es*

$$\varphi(x_1, ...x_n) = \begin{cases} 1 & si \; \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} > \mu_0 + \mathbf{t}_{n-1,\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} \\ 0 & en \; otro \; caso \end{cases}$$

## 6.4.2. Contraste de Máxima Verosimilitud

A pesar de que el proceso descrito antes resulta a menudo efectivo, en ocasiones la obtención del CUMP no es posible, no existe. Ante esto la práctica usual es un método que provee de contrastes con buenas propiedades y que en cierto modo es una extensión del método expuesto en el subapartado previo (esto quiere decir que los contrastes anteriores también pueden obtenerse mediante este método).

DEFINICIÓN 6.3 *Para un problema de hipótesis (compuestas o no)* $(\alpha, \Theta_0, \Theta_1)$ *todo contraste cuya región de rechazo viene determinada mediante la desigualdad*

$$\lambda(x_1, ...x_n) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} f_\theta(x_1, ...x_n)}{\sup_{\theta \in \Theta} f_\theta(x_1, ...x_n)} < c$$

*con c una determinada constante, se denomina contraste de máxima verosimilitud.*

El cociente $\lambda$ es la razón que hay entre la verosimilitud del parámetro cuando éste está en la zona nula $(\Theta_0)$ y la verosimilitud cuando el parámetro está en el espacio paramétrico $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$. Está claro que la constante $c \in [0, 1]$ y se obtiene a partir de la igualdad

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta \left\{ (x_1, ...x_n) : \lambda(x_1, ...x_n) < c \right\}$$

Si $\lambda$ tiene una distribución continua entonces siempre podremos encontrar $c$ cumpliendo la restricción sobre el niel de significación. Sin embargo, al igual que ocurría en contrastes previos, cuando $\lambda$ sea discreta, puede que estemos obligados a aleatorizar el contraste si queremos que conservar un determinado nivel.

Nótese que el cociente $\lambda$ tal y como ha sido descrito viene dado mediante los estadísitcos de máxima verosimilitud de las regiones $\Theta_0$ y $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$.

PROPOSICIÓN 6.3 *Cuando las hipótesis son simples el test de máxima verosimilitud y el de Neyman Pearson coinciden.*

Todos los contrastes presentados más los que aparecen en los cuadros de la siguiente sección pueden obtenerse mediante el método de la máxima verosimilitud.

## 6.5. Cuadro de Constrastes paramétricos

Bajo la hipotesis de que la población (o poblaciones) se distribuye según una normal, los test más importantes son los siguientes:

1. Test para la esperanza a nivel $\alpha$ son

| | $H_0$ | $\sigma^2$ conocida | $\sigma^2$ desconocida |
|---|---|---|---|
| | | Rechazo $H_0$ | si se cumple |
| I | $\mu \leq \mu_0$ | $\overline{x} \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$ | $\overline{x} \geq \mu_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} \mathsf{t}_{n-1,\alpha}$ |
| II | $\mu \geq \mu_0$ | $\overline{x} \leq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$ | $\overline{x} \leq \mu_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} \mathsf{t}_{n-1,1-\alpha}$ |
| III | $\mu = \mu_0$ | $\lvert\overline{x} - \mu_0\rvert \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$ | $\lvert\overline{x} - \mu_0\rvert \geq \frac{s}{\sqrt{n}} \mathsf{t}_{n-1,\alpha/2}$ |

Los test I y II para varianza conocida son UMP. Todos los test se pueden deducir mediante el método de la máxima verosimilitud (algunos de ellos se pueden obtener también mediante el método de cociente de verosimilitudes monótono). Se supone que las hipótesis alternativas son $H_1 \equiv \mu > \mu_0$, $\mu < \mu_0$ y $\mu \neq \mu_0$ respectivamente.

2. Los test de la varianza o llamados test $\mathcal{X}^2$ a nivel $\alpha$, son

| | $H_0$ | $\mu$ conocida | $\mu$ desconocida |
|---|---|---|---|
| I | | Rechazo $H_0$ | si se cumple |
| | $\sigma \geq \sigma_0$ | $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{n-1} \leq \sigma_0^2 \frac{\mathcal{X}^2_{n,1-\alpha}}{n-1}$ | $s^2 \leq \sigma_0^2 \frac{\mathcal{X}^2_{n-1,1-\alpha}}{n-1}$ |
| II | $\sigma \leq \sigma_0$ | $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{n-1} \geq \sigma_0^2 \frac{\mathcal{X}^2_{n,\alpha}}{n-1}$ | $s^2 \geq \sigma_0^2 \frac{\mathcal{X}^2_{n-1,\alpha}}{n-1}$ |
| III | $\sigma = \sigma_0$ | $\left\{\begin{array}{c} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{n-1} \leq \sigma_0^2 \frac{\mathcal{X}^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}{n-1} \\ \text{ó} \\ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{n-1} \geq \sigma_0^2 \frac{\mathcal{X}^2_{n,\frac{\alpha}{2}}}{n-1} \end{array}\right.$ | $\left\{\begin{array}{c} s^2 \leq \sigma_0^2 \frac{\mathcal{X}^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}{n-1} \\ \text{ó} \\ s^2 \geq \sigma_0^2 \frac{\mathcal{X}^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}{n-1} \end{array}\right.$ |

3. Consideremos ahora dos muestras $X_1, ..., X_m$ e $Y_1, ..., Y_n$, independientes y de distribución $N(\mu_1, \sigma_1)$ y $N(\mu_2, \sigma_2)$ respectivamente. Consideremos los estadísiticos

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \frac{\sum X_i}{m}, \overline{Y} = \frac{\sum Y_j}{n} \\ S_1^2 &= \frac{\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{m-1}, S_2^2 = \frac{\sum \left(Y_j - \overline{Y}\right)^2}{n-1} \end{aligned}$$

y

$$S_p^2 = \frac{(m-1) S_1^2 + (n-1) S_2^2}{m+n-2}$$

La tabla de los test o contrastes para la diferencia de medias es la siguiente:

| | $H_0$ | $\sigma_1^2$ y $\sigma_2^2$ conocidas | $\sigma_1^2$ y $\sigma_2^2$ desconocidas, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ |
|---|---|---|---|
| | | Rechazo $H_0$ | si se cumple |
| I | $\mu_1 - \mu_2 \leq \delta$ | $\overline{x} - \overline{y} \geq$ $\delta + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}$ | $\overline{x} - \overline{y} \geq$ $\delta + \mathsf{t}_{m+n-2,\alpha} s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$ |
| II | $\mu_1 - \mu_2 \geq \delta$ | $\overline{x} - \overline{y} \leq$ $\delta - z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}$ | $\overline{x} - \overline{y} \leq$ $\delta - \mathsf{t}_{m+n-2,\alpha} s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$ |
| III | $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ | $\lvert\overline{x} - \overline{y} - \delta\rvert \leq$ $z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}$ | $\lvert\overline{x} - \overline{y} - \delta\rvert \leq$ $\mathsf{t}_{m+n-2,\frac{\alpha}{2}} s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$ |

donde $\delta$ es una constante conocida. Cuando $\sigma_1^2$ y $\sigma_2^2$ son desconocidas y además $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ entonces la región de rechazo queda definida con ayuda del estadístico $\mathsf{t}_{f,\alpha} \sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}}$ donde $f$ es el entero más próximo a

$$\frac{\left(\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}\right)^2}{\frac{\left(S_1^2\right)^2}{m+1} + \frac{\left(S_2^2\right)^2}{n+1}}$$

4. Los test $\mathcal{F}$ tienen por objeto contrastar las varianzas de dos muestras. Sean dos muestras independientes como las del apartado de arriba. Teniendo en cuenta que

$$\frac{(m-1)\,S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \mathcal{X}_{m-1}^2, \ \frac{(n-1)\,S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \mathcal{X}_{n-1}^2$$

y que por tanto

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim \mathcal{F}_{m-1,n-1},$$

se pueden deducir las siguientes regiones de rechazo para un nivel de significación $\alpha$ :

| | $H_0$ | $\mu_1$ y $\mu_2$ conocidas | $\mu_1$ y $\mu_2$ desconocidas |
|---|---|---|---|
| I | | Rechazo $H_0$ | si se cumple |
| | $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ | $\frac{\sum_{i=1}^m (x_i-\mu_1)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i-\mu_2)^2} \geq \frac{m}{n} F_{m,n,\alpha}$ | $\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{m-1,n-1,\alpha}$ |
| II | $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ | $\frac{\sum_{i=1}^n (y_i-\mu_2)^2}{\sum_{i=1}^m (x_i-\mu_1)^2} \geq \frac{n}{m} F_{m-1,n-1,\alpha}$ | $\frac{s_2^2}{s_1^2} \geq F_{m-1,n-1,\alpha}$ |
| III | $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ | $\begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^m (x_i-\mu_1)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i-\mu_2)^2} \geq \frac{m}{n} F_{m,n,\frac{\alpha}{2}} \\ \text{ó} \\ \frac{\sum_{i=1}^n (y_i-\mu_2)^2}{\sum_{i=1}^m (x_i-\mu_1)^2} \geq \frac{n}{m} F_{m-1,n-1,\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$ | $\begin{cases} \frac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{m-1,n-1,\frac{\alpha}{2}} \\ \text{si } s_1^2 \geq s_2^2 \\ \text{ó} \\ \frac{s_2^2}{s_1^2} \geq F_{m-1,n-1,\frac{\alpha}{2}} \\ \text{si } s_1^2 \leq s_2^2 \end{cases}$ |

Situaciones particulares:

**Binomial** Si se trata de una muestra suficientemente grande $(n > 30)$ distribuida como una Binomial $B(1,p)$ entonces el test de la esperanza es como sigue:

| $H_0$ | Región de rechazo |
|---|---|
| $p = p_0$ | $\lvert\overline{x} - p_0\rvert > Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ |
| $p \leq p_0$ | $\overline{x} - p_0 > Z_{\alpha}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ |
| $p \geq p_0$ | $\overline{x} - p_0 < Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ |

**Poisson** Si la muestra es de una Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ y $n$ es grande entonces el test se describe como:

| $H_0$ | Región de rechazo |
|---|---|
| $\lambda = \lambda_0$ | $\lvert\overline{x} - \lambda_0\rvert > Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}$ |
| $\lambda \leq \lambda_0$ | $\overline{x} - \lambda_0 > Z_{\alpha}\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}$ |
| $\lambda \geq \lambda_0$ | $\overline{x} - \lambda_0 < Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}$ |

**Comparación de 2 proporciones** Si se trata de dos muestras suficientemente grandes $(m, n > 30)$, $X_1, ..., X_m$ e $Y_1, ..., Y_n$, independientes y distribuidas como Binomiales $B(1, p_1)$ y $B(1, p_2)$ respectivamente, entonces el test para comparar las proporcines $p_i$ es:

| $H_0$ | Región de rechazo |
|---|---|
| $p_1 = p_2$ | $\lvert\overline{x} - \overline{y}\rvert > Z_{\alpha/2}\sqrt{p\,(1-p)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}$ |
| $p_1 \leq p_2$ | $\overline{x} - \overline{y} > Z_{\alpha}\sqrt{p\,(1-p)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}$ |
| $p_1 \geq p_2$ | $\overline{x} - \overline{y} < Z_{1-\alpha}\sqrt{p\,(1-p)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}$ |

donde

$$p = \frac{m\overline{x} + n\overline{y}}{m+n}.$$

**Comparación de $n$ proporciones** El test de la $\mathcal{X}^2$ aparece en el contraste de la igualdad de $n$ proporciones. Sea $X_1, X_2, ..., X_k$ v.a. independientes con distribución binomial $B(n_i, p_i)$, $i = 1, ..., k$, respectivamente ($k \geq 2$). Consideremos el estadístico

$$T = \sum_{i=1}^{k} \left( \frac{(X_i - n_i p_i)}{\sqrt[2]{n_i p_i\,(1-p_i)}} \right)^2 .$$

Se demuestra que $T \sim \mathcal{X}_k^2$ si las $n_i$ tienden a infinito.

Pretendemos ahora contrastar la hipótesis

$$H_0 = p_1 = p_2 = ... = p_k = p$$

con $p$ conocido. Para ello realizamos $T$ bajo $H_0$, i.e. realizamos

$$Y = \sum_{i=1}^{k} \left( \frac{(X_i - n_i p)}{\sqrt[2]{n_i p\,(1-p)}} \right)^2$$

y decidimos rechazar $H_0$ si $y \geq \mathcal{X}_{k,\alpha}^2$. Sin embargo, en la práctica $p$ es desconocido y lo que hacemos es realizar $T$ con todos los $p_i$ coincidiendo con $\widehat{p} = \frac{\sum x_i}{\sum n_i}$, i.e. la realización de

$$Y_1 = \sum_{i=1}^{k} \left( \frac{(X_i - n_i \widehat{p})}{\sqrt[2]{n_i \widehat{p}\,(1-\widehat{p})}} \right)^2$$

Se puede probar que $Y_1$ se distribuye (asintóticamente) como una $\mathcal{X}_{k-1}^2$, lo cual nos proporciona como región crítica, a un nivel $\alpha$, $y_1 \geq \mathcal{X}_{k-1,\alpha}^2$.

**Muestras pareadas** (Contrastes antes-después) Se dispone de dos variables observadas $X$ e $Y$ sobre una misma población con distribuciones $N(\mu_1, \sigma_1)$ y $N(\mu_2, \sigma_2)$ respectivamene, de suerte que si $X_1, ..., X_n$ e $Y_1, ..., Y_n$ son las muestras aleatorias, en este caso $X_i$ no es independiente de $Y_i$. Por tanto podemos decir que hay dependencia entre las dos muestras. Sin embargo las variables $D_i = X_i - Y_i$ son son independientes. Consideramos la m.a.s. $D_1 = X_1 - Y_1, D_2 = X_2 - Y_2, ..., D_n = X_n - Y_n$, la cual procede de $D = X - Y$ y se distribuye como una $N(\mu_1 - \mu_2, \sigma)$.

El objetivo es verificar la igualdad entre las medias poblaciones de $X$ e $Y$. Realizamos el test bajo las hipótesis $H_0 = \mu_1 - \mu_2 \geq 0$, frente a $H_1 = \mu_1 - \mu_2 < 0$. Para esto llevamos a cabo las realizaciones de $\overline{D} = \frac{\sum D_i}{n}$, $S_D^2 = \frac{\sum \left(D_i - \overline{D}\right)^2}{n-1}$, esto es

$$\overline{d} = \frac{\sum d_i}{n}, \ s_d^2 = \frac{\sum \left(d_i - \overline{d}\right)^2}{n-1}.$$

Y puesto que

$$\frac{\overline{D} - \overline{d}}{S_D / \sqrt{n}} \sim \mathsf{t}_{n-1}$$

se tiene que el criterio o contraste queda establecido como:

| | $H_0$ | Región de rechazo a nivel $\alpha$ |
|---|---|---|
| I | $\mu_1 - \mu_2 \leq \delta$ | $\overline{d} \geq \delta + \mathsf{t}_{n-1,1-\alpha} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$ |
| II | $\mu_1 - \mu_2 \geq \delta$ | $\overline{d} \leq \delta + \mathsf{t}_{n-1,\alpha} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$ |
| III | $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ | $\left|\overline{d} - \delta\right| \leq \mathsf{t}_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$ |

## 6.6. Ejemplos

EJEMPLO 6.12 *Consideremos el problema de contrastar $\mu = \mu_0$ frente a $\mu \neq \mu_0$ para una muestra $N(\mu, \sigma)$ supuesto que $\sigma$ es desconocida. Dado que el proceso consiste en realizar una comparativa de hipótesis simples, las verosimilitudes han de calcularse usando todos los parámetros desconocidos de los que depende la distribución. Por tanto se toma $\theta = (\mu, \sigma)$. Así las hipótesis son*

$$\begin{aligned} H_0 &= \mu = \mu_0, \ \sigma > 0 \\ H_1 &= \mu \neq \mu_{0,} \ \sigma > 0. \end{aligned}$$

*lo que se corresponde con los espacios paramétricos*

$$\Theta_0 = \left\{ \left( \mu_0, \sigma^2 \right) : \sigma > 0 \right\}$$

*y*

$$\Theta = \left\{ \left( \mu, \sigma^2 \right) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0 \right\}.$$

*Con esto el método de la máxima verosimilitud nos lleva a examinar*$\lambda$*. Por un lado*

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \Theta} f_\theta(x_1, ...x_n) &= \sup_{(\mu, \sigma^2) \in \Theta} \frac{1}{\left( \sqrt{2\pi}\sigma \right)^n} \exp\left( -\frac{\sum \left( x_i - \mu \right)^2}{2\sigma^2} \right) \\ &= \frac{1}{\left( \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \right)^n} \frac{e^{-n/2}}{\left( \sum \left( x_i - \overline{x} \right)^2 \right)^{n/2}} \end{aligned}$$

*ya que el estimador de máxima verosimilitud del parámetro bidimensiona* $(\mu, \sigma^2)$ *es*

$$\left( \mu^*, \sigma^{2*} \right) = \left( \overline{x}, v^2 \right) = \left( \frac{\sum x_i}{n}, \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n} \right).$$

*Y por otro,*

$$\begin{aligned} \lambda(x_1, ...x_n) &= \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} f_\theta(x_1, ...x_n)}{\sup_{\theta \in \Theta} f_\theta(x_1, ...x_n)} \\ &= \frac{\frac{\exp\left( -\frac{n}{2} \right)}{\left( \frac{2\pi \sum (x_i - \mu_0)^2}{n} \right)^{n/2}}}{\frac{1}{\left( \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \right)^n} \frac{e^{-n/2}}{\left( \sum (x_i - \overline{x})^2 \right)^{n/2}}} \\ &= \frac{\left( \sum \left( x_i - \overline{x} \right)^2 \right)^{n/2}}{\left( \sum \left( x_i - \mu_0 \right)^2 \right)^{n/2}} \\ &= \left( \frac{1}{1 + \frac{n(\overline{x} - \mu_0)^2}{\sum (x_i - \overline{x})^2}} \right)^{n/2} \end{aligned}$$

*Así la región de rechazo definida por* $\lambda < c$ *equivale a* $\left| \frac{n(\overline{x} - \mu_0)^2}{\sum (x_i - \overline{x})^2} \right| > c'$. *Esto se reescribe como*

$$\left| \frac{\sqrt{n} \left( \overline{x} - \mu_0 \right)}{s} \right| > c''$$

*donde* $s^2 = \sum (x_i - \overline{x})^2 / (n-1)$. *Ahora bien, el estadístico*

$$T = \frac{\left(\overline{X} - \mu_0\right)}{S/\sqrt{n}}$$

*sigue una distribución* $\mathsf{t}_{n-1}$, *y por consiguiente en* $\Theta_0$

$$\alpha = P(\lambda < c) = P(|\mathsf{t}_{n-1}| > c'')$$

*lo que significa que* $c'' = \mathsf{t}_{n-1,\alpha/2}$ *y la región de rechazo buscada es*

$$C = \left| \frac{\sqrt{n}(\overline{x} - \mu_0)}{s} \right| > \mathsf{t}_{n-1,\alpha/2}$$

Ejemplo 6.13 *Nueve observaciones sobre la cantidad de cobre en cierta solución han dado como media muestral* $\overline{x} = 8{,}3$ *y como desviación estándar* $s = 0{,}025$. *Sea* $\mu$ *la cantidad media de cobre y sea el test cuyas hipótesis son* $H_0 = \mu = 8{,}42$ *contra* $H_1 = \mu < 8{,}42$ *a un nivel* $\alpha = 0{,}05$.

*Construimos el test en base a los resultados previos: así* $C$ *se describe como*

$$\overline{x} \leq \mu_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} \mathsf{t}_{n-1,1-\alpha}$$

$n = 9$, $\overline{x} = 8{,}3, s = 0{,}025$ *y* $\mu_0 = 8{,}42$. *Como* $\mathsf{t}_{n-1,1-\alpha} = \mathsf{t}_{8,1-0{,}05} = -1{,}86$ *entonces*

$$\mu_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} \mathsf{t}_{n-1,1-\alpha} = 8{,}42 + \frac{0{,}025}{\sqrt{9}} (-1{,}86) = 8.404\,5$$

*y* $8{,}3 \leq 8.404\,5$, *luego rechazamos* $H_0$.

Ejemplo 6.14 *Un fabricante afirma que la duración de un determinado tipo de pila tiene una varianza de 5000 horas*$^2$. *Una muestra de tamaño 26 posee una cuasivarianza de 7200 horas*$^2$. *Suponiendo razonable tratar estos datos como procedentes de una m.a.s. normal, contrastamos la afirmación del fabricante a un nivel* $\alpha = 0{,}02$.

*Así pues* $H_0 = \sigma^2 = 5000$ *y* $H_1 = \sigma^2 \neq 5000$ *y evaluamos*

$$\frac{\sigma_0^2}{n-1} \mathcal{X}_{n-1,1-\alpha/2}$$

*y*

$$\frac{\sigma_0^2}{n-1} \mathcal{X}_{n-1,\alpha/2}.$$

*Por una lado*

$$\frac{\sigma_0^2}{n-1}\mathcal{X}_{n-1,1-\alpha/2} = \frac{5000}{25}\mathcal{X}_{25,0,99} = \frac{5000}{25}11{,}524 = 2304{,}8$$

*y por otro*

$$\frac{\sigma_0^2}{n-1}\mathcal{X}_{n-1,\alpha/2} = \frac{5000}{25}\mathcal{X}_{25,0,01} = \frac{5000}{25}44{,}314 = 8862{,}8$$

*Como* $s^2 = 7200$ *y* $7200 \nleq 2304{,}8$, *ni* $7200 \ngeq 8862{,}8$, *entonces aceptamos* $H_0$ *a un nivel 0.02.*

Ejemplo 6.15 *La vida media en una muestra de nueve bombillas es de 1309 horas con una desviación estándar de* $s = 420$ *horas. Una segunda muestra de tamaño 16tomada de un lote diferente tiene una vida media de 1205 horas y una desviación estándar de 390. Contrastamos si hay alguna diferencia significativa entre las medias de los dos lotes, sumponiendo que ambas proceden de un modelo normal con la misma varianza y para un nivel* $\alpha = 0.05$ :

*Se trata de hacer un test donde las hipótesis son* $H_0 = \mu_1 = \mu_2$, $H_1 = \mu_1 \neq \mu_2$, $m = 9$, $n = 16$, $\overline{x}_1 = 1309$, $\overline{x}_2 = 1205$, $s_1 = 420$ *y* $s_2 = 390$.

$$\begin{aligned} & \mathsf{t}_{m+n-2,\alpha/2}s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} \\ = & \ (2{,}069)\sqrt[2]{\frac{(9-1)\,420^2+(16-1)\,1205^2}{23}}\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{16}} \\ = & \ 865.67 \end{aligned}$$

*y como*

$$|\overline{x}_1 - \overline{x}_2| = |1309 - 1205| = 104 \ngeq 865.67$$

*entonces no podemos rechazar la hipótesis nula.*

Ejemplo 6.16 *Nueve individuos de una misma especie han sido sometidos a un tratamiento al objeto de decrementar su peso. El resultado ha sido el siguiente:*

| | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *antes* | *132* | *139* | *126* | *114* | *122* | *132* | *142* | *119* | *126* |
| *después* | *124* | *141* | *118* | *116* | *114* | *132* | *145* | *123* | *121* |

*Damos como hipótesis nula que el tratamiento no es efectivo, lo cual se traduce en* $H_0 = \mu_1 - \mu_2 \leq 0$*, frente a la hipótesis* $H_1 = \mu_1 - \mu_2 > 0$*, y pretendemos contrastar éstas a un nivel* $\alpha = 0.01$.

*Para ello consideramos las dos v.a.* $X$ *e* $Y$*, antes y después para una misma población. Se trata de dos variables dependientes, es pues un modelo de muestras pareadas. Utilizamos los resultados dados en el epígrafe previo: para nuestro caso particular* $\overline{d} = 2$ *y* $s_d^2 = 26{,}75$*. Así el caso II nos conduce al cálculo*

$$\delta + t_{n-1,\alpha}\frac{s_d}{\sqrt{n}} = 0 + t_{8,0.01}\frac{5.17}{\sqrt{9}} = 2.896\frac{5.17}{3} = 4.99$$

*y puesto que* $\overline{d} = 2 \ngeq 4.99$*, entonces aceptamos la hipótesis nula, esto es, que el tratamiento no es efectivo.*

EJEMPLO 6.17 *En una empresa de fundición se recibe periodicamene mineral de hierro procedente de dos yacimientos distintos A y B. Para estudiar la calidad del mineral recibido se extraen dos muestras y se analiza la riqueza en hierro, obteniendo los siguientes resultado en tanto por ciento:*

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 43 | 45 | 42 | 35 | 37 | 38 | 33 | 38 | 41 | 43 | | |
| B | 39 | 36 | 35 | 37 | 40 | 39 | 40 | 38 | 35 | 39 | 38 | 34 |

*suponiendo normal la riqueza del mineral en ambos yacimientos, nos proponemos comparar las medias de ambos a un nivel* $\alpha = 0{,}05$.

*Empezamos por analizar las varianzas y para ello enunciamos las siguientes hipótesis:*

$$H_0 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \ H_1 = \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

*y puesto que desconocemos las esperanzas analizamos las desigualdades*

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{m-1,n-1,\frac{\alpha}{2}} \ \text{si} \ s_1^2 \geq s_2^2$$

*y*

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} \geq F_{m-1,n-1,\frac{\alpha}{2}} \ \text{si} \ s_1^2 \leq s_2^2$$

*Los datos son:* $m = 10$, $n = 12$, $\alpha = 0.05$ *y las realizaciones dan* $s_1^2 = 15{,}17$ *y* $s_2^2 = 4{,}27$*. Entonces*

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{15{,}17}{4{,}27} = 3.5527 \ngeq F_{9,11,0{,}025} = 3.59$$

*y*

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{4.27}{15.17} = 0.281\,48 \ngeq F_{11,9,0.025}$$

*lo cual supone aceptar la igualdad de varianzas.*
*Con igualdad de varianzas, aunque desconocidas, comparamos medias poblacionales. Para esto hemos de ver si*

$$|\overline{x} - \overline{y}| \leq \mathsf{t}_{m+n-2,\frac{\alpha}{2}} s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}.$$

*Se tiene*

$$\begin{aligned} \mathsf{t}_{m+n-2,\frac{\alpha}{2}} s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} &= \mathsf{t}_{20,0,025} \frac{(10-1)\,(15{,}17) + (12-1)\,(4{,}27)}{12 + 10 - 2} \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{12}} \\ &= (2{,}086)\,3.928\,5 = 8.194\,9 \end{aligned}$$

*mientras que* $|\overline{x} - \overline{y}| = |39{,}5 - 37{,}5| = 2$. *Se cumple la desigualdad, rechazamos* $H_0$, *o lo que es lo mismo, afirmamos que hay diferencias significativas entre ambas poblaciones.*